PROGRAMMA PROVVISORIO DI ANALISI MATEMATICA 1
LAUREA TRIENNALE DI MATEMATICA, A.A. 2020/2021
DOCENTE MICHIEL BERTSCH

Libro di testo di riferimento
Luigi Chierchia, Corso di analisi, prima parte. McGraw-Hill (2019)

NB. Le indicazioni bibliografiche si riferiscono al libro di testo.

Insiemi. Unione e intersezione di famiglie di insiemi. Classi di relazioni: di equivalenza, di ordine (parziale o totale), funzioni. Funzioni iniettive, suriettive. Biiezioni.
Assiomi dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Maggiorante e minorante di $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$; $\max A$, $\min A$; unicità del massimo e del minimo; insieme (superiormente, inferiormente) limitato.
Le funzioni $|x|$, $\operatorname{sgn} x$, x^+ e x^-. Proprietà elementare del valore assoluto. Media aritmetica di due numeri reali. Distanza (detta euclidea) tra due numeri reali.
Sottoinsiemi induttivi di $\mathbb{R}$; definizione di $\mathbb{N}$ come il più piccolo sottoinsieme induttivo di $\mathbb{R}$; le proprietà di $\mathbb{N}$ note come gli assiomi di Peano.
Principio di induzione.
Se $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ e $n < x < n+1$, allora $x \neq \mathbb{N}$.
Definizione di $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$ e $\mathbb{Q} = \{p/q;\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$.
Insieme finito. Sottoinsiemi finiti non vuoti di $\mathbb{R}$ ammettono massimo e minimo. Sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{N}$ ammettono minimi. Sottoinsiemi limitati e non vuoti di $\mathbb{N}$ ammettono massimo.
Successioni, definite come funzioni con dominio $\mathbb{N}$.
Definizioni ricorsive con esempi: potenze x^n, sommatorie, $n!$.
Disuguaglanza di Bernoulli; somme geometriche.
Coefficienti binomiali, triangolo di Pascal, binomi di Newton
Insiemi con la stessa cardinalità, insiemi numerabili. L'insieme $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ non è numerabile. Insiemi finiti e infiniti. L'unione finita o numerabile di insiemi numerabili è numerabile
Definizione e caratterizzazione dell'estremo superiore e inferiore di sottoinsiemi nonvuoti di $\mathbb{R}$
Proprietà di Archimede.
Densità dei numeri razionali.
Parte intera, $[x]$ e parte frazionaria, $\{x\}$, di un numero reale x
Definizione, esistenza e unicità di $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$.
Funzione inversa, f^{-1}, di funzioni biiettive $f : A \to B$, grafico di f^{-1} se $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ è l'inversa di $x \mapsto x^n$ $(x \geq 0)$.
Definizione di x^r per $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, e $r = p/n \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.
Possibile definizione di potenze di x per valori negativi di n (e.g., se $x < 0$, allora $\exists \sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}$ ma $\nexists \sqrt{x} \in \mathbb{R}$).
Distanza euclidea $d(x, A)$ tra $x \in \mathbb{R}$ e $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Distanza euclidea $d(A, B)$ tra due insiemi $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ e $\varnothing \neq B \subseteq \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ esteso ($\mathbb{R}^*$); definizioni di $\sup A = +\infty$, $\inf A = -\infty$.
Intervalli, intervalli aperti e chiusi.
Intorni, intorni simmetrici, propietà elementari degli intorni (Prop. 2.9).
Definizione di“definitivamente per $x \in x_0 \in \mathbb{R}^*$”.
Punti interni, isolati, di accumulazione; interno di un insieme; interno di un insieme; derivato di un insieme ($\mathcal{D}^* A$, $\mathcal{D}A$).
Definizione di limite di $f : A \to \mathbb{R}$ per $x \to x_0 \in \mathcal{D}^*(A)$; limiti finiti ($L \neq \pm\infty$)
Unicità del limite.
Permanenza del segno (Teor. 2.16) e proprietà simili (Prop. 2.17).
Teorema del confronto per i limiti (Teor. 2.18).
Limite destro/sinistro, punto di accumulazione destro/sinistro.
Limiti di funzioni monotòne.
Algebra dei limiti; algebra estesa dei limiti; forme indeterminate.
$f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$ come notazione per $f(x) \to 0$ per $x \to x_0$.
$f \sim g$ per $x \to x_0$ come notazione per $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ per $x \to x_0$ ($\Leftrightarrow f(x) = g(x)(1 + o(1))$ per $x \to x_0$).
Calcolo di limiti di funzioni razionali
Successioni convergenti, divergenti, irregolari.
Limiti notevoli di successioni : a^n/n^p se $a > 1$; $a^n n^p$ se $0 < a < 1$, $n^{1/n}$, $a^{1/n}$ se $a > 0$.
Il numero di Eulero, e.
Caratterizzazione di $\sup E$, $\inf E$, $\mathcal{D}^* E$ e $\mathcal{D}E$ tramite successioni (Prop 2.39 e 2.40).
Teorema Ponte. Non-esistenza di limiti.
Continuità di una funzione: in un punto del suo dominio e in un insieme.
Permanenza del segno per funzioni continue.
Continuità di $x \mapsto x^r$ in $[0, +\infty)$ per ogni $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.
Teorema degli zeri di funzioni continue (T 2.50). Teorema dei valori intermedi.
L'immagine di una funzione continua in un intervallo è un intervallo.
Punti di discontinuità (eliminabili, di salto, essenziali).
Limiti di funzioni composte, cambiamento di variabile nei limiti.
Una funzione "composta da funzioni continue è continu"; esempio: $\max f, g$ e $\min f, g$.
Definizione di a^x per $x \neq \mathbb{Q}$: funzioni esponenziali in $\mathbb{R}$; funzione potenza con esponente reale (vedi paragrafo 3.1).
Il limite di $(1 + \frac{1}{x})^x$ per $x \to -\infty$; il limite di $(1 + x)^{1/x}$ per $x \to 0$.
Limite notevole del prodotto di un funzione esponenziale e una funzione potenza.
Grafici della funzione esponenziale e della funzione potenza.
La funzione logaritmo come invera della funzione esponenziale (paragrafo 3.2).
Proprietà elementari del logaritmo; l'importanza della formula $a^b = e^b \log a$.
$\log_a(xy) = \log_a |x| + \log_a |y|$ se $xy > 0$; $\sqrt{x^2} = |x|$ se $x \in \mathbb{R}$.
La funzione inversa di una funzione biettiva continua 'e continua?
Funzioni continue e iniettive su un intervallo sono strettamente monotòne.

Limiti notevoli: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

Le funzioni trigonometrcihe e le loro inverse arcsin, arccos e arctg . Il limiti notevoli $\sin x = x(1 + o(1))$ e $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2(1 + o(1))$ per $x \to 0$.
Le funzioni iperboliche sinh e cosh. L'inversa di $\sinh x$
Numeri complessi: definizione, le due operazioni (addizione e moltiplicazione), proprietà elementari, la notazione standard $z = x + iy$, parte reale e immaginaria,

interpretazione geometrica della somma, il numero i, il coniugato $\overline{z}$; come dividere due numeri complessi.
Sottosuccessioni, teorema di Bolzano-Weierstrass. Massimo e minimo limite di successioni: definizione ed esistenza.
Successioni di Cauchy (fondamentali). Insiemi (di numeri reali) aperti e chiusi. Caratterizzazione di chiusi tramite successioni (prop 6.24). Chiusura e frontiera di un insieme: definizione e proprietà elementari.
Insiemi compatti (per successioni): definizione e la loro caratterizzazione (teor 6.32). Teorema di Weierstrass sulle funzioni continue sui compatti.

Il concetto di controimmagine: caratterizzazione delle funzioni continue (prop 5.36).
Funzioni uniformemente continue: definizione, esempi, funzioni lipschitziane e hölderiane. Funzioni continue non sono sempre uniformemente continue. Alcune propriet' elementari (prop 6.48 e 6.49). Teorema di Heine-Cantor.
Continuità delle funzioni inverse di funzioni biiettive e continue definite su un compatto.

DA FINIRE